



**Zadania na XIX Podkarpacki Konkurs Matematyczny
im. Franciszka Lejki
Poziom II**

(klasy drugie liceum i trzecie technikum)

Etap rejonowy

30 marca 2019 r. godzina 10.00

(150 minut)

1. Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie:

$$2x^2 - 6xy + 5y^2 = 5.$$

2. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{x+z} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

3. Wykaż, że jeżeli liczby 30 i liczba naturalna n są względnie pierwsze (tzn. ich największy wspólny dzielnik wynosi 1), to liczba $n^4 - 5n^2 + 4$ jest podzielna przez 360.

4. Dany jest trapez $ABCD$, gdzie $AB \parallel CD$. Przekątna AC rozcina ten trapez na trójkąt ABC o polu S_1 oraz trójkąt ACD o polu S_2 . Oblicz pola figur na jakie rozcina ten trapez odcinek łączący środki ramion tego trapezu.

5. Niech a , b , c oznaczają długości boków trójkąta, p – połowę jego obwodu, a r – promień okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wykaż, że:

$$\frac{1}{(p-a)^2} + \frac{1}{(p-b)^2} + \frac{1}{(p-c)^2} \geq \frac{1}{r^2}.$$

Powodzenia!